Шифр: В-5

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2018/2019
Ленинградская область

Район Волховский

Школа Волховская городская гимназия №3 имени Героя Советского Союза Александра Лукьянова

Класс 10

ФИО Мельник Денис Александрович

Можно доказать, что хотя бы у одного (o) две стороны будут сторонами n-уг-ка:
Если у каждого (o) 2 стороны диаметры, то на n сторонах n-уг-ка лежит n-2 стороны тогда 2 стороны не задействованы, но они входят в фигуры из разреза и не входят в (o), значит мы разрезали не только на 3-уг-ки – противоречие, значит хотя бы у 2 (а значит, и у 1-ого (o)) 2 стороны на n-уг-ке
Если таких (o) более 2, то всего со сторонами на n-уг-ке n-3 (o), у какого-то (o) все стороны-диагонали, но такого быть не может (см. док.)

№ 9 В-5

Обозначим 0 — 1-й цвет, 1 — 2-й цвет

Многоугольник разрезается на n-2 треугольника соединяющими n-3 диагоналями n-2 вершины

Найдём количество способов разрезать n-угольник на n-2 треугольника углов

У (△) — 3, всего $3(n-2)=3n-6$

Если все вершины диагонали, то чтобы 3-уг-ка были разноцветные все диагонали

вершины — 0 цвет, у 1-й

у 3-ей — 0 цвет, у 2-й — 1 цвет, тогда у 1-й — 1 цвет (если изначально взяли бы у 1-й — 1цвет, то получился бы 0 цвет) — противоречие, значит хотя бы одна сторона (△) — сторона n-уг-ка

A_n = кол-во способов разрезать $(n-1)$ уг-к на $(\triangle)$ | ровно у одного 2 стороны на изначальном n-уг-ке (способов его разместить $\frac{n-1}{2}$) округленное в большую сторону

~~Таких графов~~ $\cancel{\frac{n}{2}}$

N 9 (продолжение) В-5

Значит ровно 2 (△) с 2-мя сторонами на сторонах n-уг-ка

Обозначим A_n — кол-во способов разрезать n-уг-к на (△)

~~Отв~~ Т.к. у нас 2 незадействованные (не на диагоналях) вершины, то они могут быть любого цвета ($2^2 = 4$ вариантов 00 01 10 11), в графе из диагоналей и вершин не более одной вершины имеют степень ≥ 3, есть 2 способа сделать такой граф из различных ~~ребер~~ диагоналей

Ответом будет $8 \cdot A_n$

$4AM^2 + BH^2 = AK^2 + 2KB \cdot AK + KB^2$

Аналогично (из т. Пиф.):

$4CN^2 + BH^2 = CF^2 + 2CF \cdot BF + BF^2$

$MB'^2 + MB^2 = BB'^2$

$NB^2 + NB'^2 = BB'^2$

$4(AM^2 + CN^2)_{ABHr} = AK^2 + 2KB \cdot AK + KB^2 + CF^2 + 2CF \cdot BF + BF^2$

$4CN^2 + 2AM = 2CF^2 + 2CF \cdot BF$

$4AM^2 + 2CN = 2AK^2 + 2AK \cdot KB$

$BH^2 - 2AM - 2CN = KB^2 + BF^2$

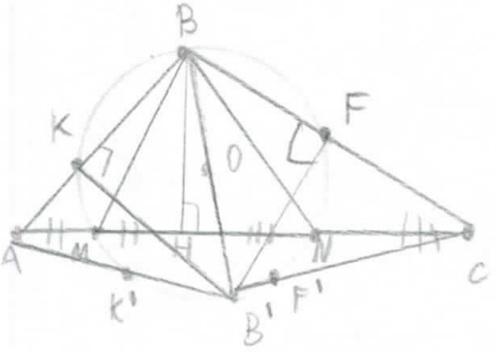
$KBFB'$ – впис., $\angle BKB' = \angle BFB' = 90°$

$\angle KBF + \angle KB'F = 180°$ (св. впис. 4-ка)

$MBNB'$ – впис., $\angle BMB' = \angle BNB' = 90°$

$\angle MBN + \angle MB'N = \angle KBF + \angle KB'F =$ (св. впис. в окр. 4-ка)

№8 В-5



Дано: $\triangle ABC$

BH – выс.

$M \in AH$

$AM = MH$

$N \in HC$

$HN = NC$

Окр. $\Omega(O; BO)$ опис. около $\triangle BMN$

Док-ть: $AB' = CB'$

Док-во:

1. $\angle BKB' = \angle BFB' = \angle BMB' = \angle BNB' = 90^0$ (впис.-е), опир. на диаметр.

т. Пиф.:

$AK^2 + KB'^2 = AB'^2$

$KB^2 + KB'^2 = BB'^2$

$CF^2 + FB'^2 = B'C^2$

$B'F^2 + FB^2 = BB'^2$

$KB^2 + KB'^2 = BF^2 + B'F^2 = BN^2 + NB'^2 = BM^2 + MB'^2 = BB'^2$

$AK \cdot AB = AM \cdot AN = AK' \cdot AB'$ (св-во секущих из 1-ой т.)

$CF \cdot CB = CN \cdot CM = CF' \cdot CB'$ (св. секущих из 1-ой т.)

$CF'(CF' + F'B') = CN(2CN + AM) = CF(CF + BF)$

$AK'(AK' + K'B') = AM(2AM + CN) = AK(AK + KB)$

$AH^2 + BH^2 = AB^2$ (т. Пиф.) $AH^2 + BH^2 = AK^2 + 2KB \cdot AK + KB^2$

№10 (продолжение) В-Б

Выберем некоторое k, возьмём число a_x, у которого $n_k = 2k+1$
Пусть число $a_x \not\equiv 0 \pmod k$

$$k+1 \equiv 1 \pmod k$$

Чтобы добавить k, нужно k прибавлений по $k+1$, то у нас может быть $2(k+1)+1$ раз, значит если $a_x \not\equiv 0 \pmod k$, то мы можем добавить $k+1$ до числа $\equiv 0 \pmod k$ понадобится не более $k-1$ прибавления — это осуществимо

$$k-1 \equiv -1 \pmod k$$

Чтобы изменить число на k, нужно k прибавлений $k-1$ встречается $2(k-1)+1$ раз

Сравним $2(k-1)+1$ и k

для $k=1$ очевидно $2(k-1)+1 \geq k$,

для $k \geq 2$

$$k-1 \geq 1$$

$$2(k-1) \geq 2$$

$$2(k-1)+1 \geq 3$$

$k-1>0$

$$k-1+1 = k-1+1$$

$$k-1+k-1+1 > k-1+1$$

$$2(k-1)+1 > k$$

Значит $2(k-1)+1 \geq k$

Значит у нас достаточно чисел чтобы изменить $a_k \not\equiv 0 \pmod{k}$ до числа $\equiv 0 \pmod{k}$ (понадобиться не более $k-1$ числа — это осуществимо), значит в данной последовательности некоторое число $\vdots\, k$ ~~все~~, но мы выбрали k — любое, значит для любого k найдётся число $\vdots\, k$ ч.т.д.

№10 (продолжение) В 5

$a_4 = a_3 + a_2 = 5a_1$

$a_5 = a_4 + a_2 = 7a_1$

$a_6 = a_5 + a_2 = 9a_1$

$a_7 = a_6 + a_2 = 11a_1$

$a_8 = a_7 + a_2 = 13a_1$

$a_9 = a_8 + a_3 = 16a_1$

$a_{10} = a_9 + a_3 = 19a_1$

Ряд можно записать в следующем виде

$$\underbrace{\begin{matrix} a_1 & a_1+1 & a_2+1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{matrix}}_{3} \quad \underbrace{\begin{matrix} a_3+2 & a_4+2 & a_5+2 & a_6+2 & a_7+2 \\ a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \end{matrix}}_{5}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} a_8+3 & a_9+3 & \dots & a_{n-1}+3 \\ a_9 & a_{10} & & \end{matrix}}_{7} \quad \underbrace{\dots\ a_{n-1}+4 \ \dots}_{9} \quad \text{и т.д.}$$

Для некоторого $a_m = 1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + 3 \cdot n_3 + 4 \cdot n_4 + 5 \cdot n_5 + \dots + Z \cdot n_Z$, $Z \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} n_i = \min\left(2i+1,\ m - \sum\limits_{j=1}^{i-1} n_j\right), & i \geq 2 \\ n_1 = \min(2i+1,\ m) \end{cases}$$

, где min – некоторая функция равная минимуму из подаваемых

$\frac{n}{6} > 16\frac{4}{6}$, зн. $\frac{n}{6} \neq 2$

$\frac{n}{6} \neq 3$

$\frac{n}{6} \neq 1$

Обозначим подходящее число за x $x \vdots 2$ $x \vdots 3$, зн. $\frac{x}{6} \in \mathbb{Z}$

Значит одно из чисел делится на 2, на 3 и на число ≥ 1; и представляется в виде произведения трёх различных чисел, больше 1, ч.т.д.

№7

$$x_n = 2^n(\sqrt[2^n]{b} - \sqrt[2^n]{a}) = 2^n(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a})(\sqrt[2^{n+1}]{b} + \sqrt[2^{n+1}]{a}) >$$

$$> 2^{n+1}(\sqrt[2^{n+1}]{b} - \sqrt[2^{n+1}]{a}) = x_{n+1}$$

$b > a > 1$

$b > 1$ $a > 1$

$\sqrt[2^n]{b} > 1$ $\sqrt[2^n]{a} > 1$

$\sqrt[2^n]{b} + \sqrt[2^n]{a} > 2$

ч.т.д.

№10

$a_1 = 1$

$a_2 = a_1 + a_1 = 2a_1$

$a_3 = a_2 + a_1 = 3a_1$

6	7	8	9	10	Σ
7	7	0	0	1	15

В-5

№6

Так как числа последовательны,

n $(n+1)$ $(n+2)$ $(n+3)$

то можно взять три последовательных числа

либо $n+n+1+n+2 = 3(n+1)$,

либо $n+1+n+2+n+3 = 3(n+2)$

Они оба делятся на 3, более того 1 из них – чётное, а другое – нечётное, значит одно из них $\vdots 2$

$n > 100$

$\frac{n}{2} > 50$, зн. $\frac{n}{2} \neq 2$

$\frac{n}{2} \neq 3$

$\frac{n}{2} \neq 1$

В-Б

1	2	3	4	5	Σ
7	1	5	0	0	13

№1 Рыцарей не может быть 10, т.к. в данном случае все числа >1 (т.к. все сказали правду), но 1 из них утверждает, что его число <1 — это неправда, значит максимум рыцарей — 9.

Покажем, что рыцарей может быть 9.

1. $\begin{cases} >1 \\ <2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} >2 \\ <3 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} >3 \\ <4 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} >4 \\ <5 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} >5 \\ <6 \end{cases}$

6. $\begin{cases} >6 \\ <7 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} >7 \\ <8 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} >8 \\ <9 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} >9 \\ <10 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} >10 \\ <1 \end{cases}$ — лжец

1. – 9. — рыцари, числа могли быть, например, такие:

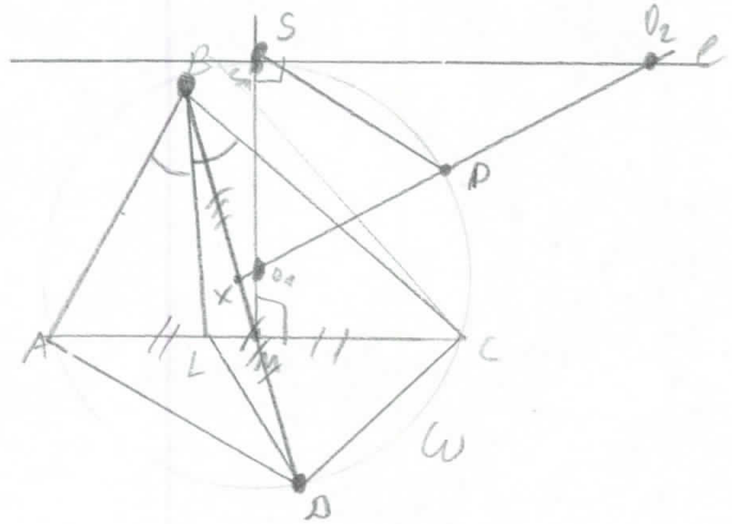
1. 1,5 2. 2,5 3. 3,5 4. 4,5 5. 5,5

6. 6,5 7. 7,5 8. 8,5 9. 9,5 10. 5

Они у 1. – 9. удовлетворяют условиям выше, у 10. — нет (т.к. 10. — лжец)

Ответ: 9 (см. пример)

№5



Дано: $\triangle ABC$

Окр. $\omega(O_1; R_1)$ — опис. около $\triangle ABC$

BL — ~~мед~~ бис. $\triangle ABC$

BM — мед. $\triangle ABC$

пр. $BM \cap \omega = (\cdot) D$

Окр. $(O_2; R_2)$ — опис. около $\triangle LDB$

~~$O_2 S$~~ пр. $l \parallel AC$

$O_2 \in l$

Док-ть: l — кас. к ω

Док-во:

1. Центры O_1 и O_2 лежат на пересечении серединных ($\perp$) к сторонам $\triangle ABC$ и $\triangle BLD$ соответственно (замечат. $(\cdot)(o)$)

значит $MO_1 \perp AC$ (т.к. BM — мед.)

~~Пусть~~ $MO_1 \cap l = (\cdot) S$, $l \parallel AC$, $MO_1 \perp AC$, зн. $MS \perp l$ (призн. ($\perp$) к ($\parallel$) пр.)

2. Проведем AD, заметим, что ~~от~~ $\triangle ADB$ — впис. в окр. ω

Пусть X — середина стороны BD, тогда $XO_2 \perp BD$ (из $\triangle BLD$) (замеч. $(\cdot)(o)$) и $XO_1 \perp BD$ (из $\triangle ABD$), зн. $O_1O_2 \perp BD$

3. Рассм. $\triangle XO_1M$ и $\triangle SO_1O_2$, у них:

1) $\angle O_1XM = \angle O_1SO_2 = 90°$ (опр. ($\perp$))

2) $\angle XO_1M$ и $\angle SO_1O_2$ — верт. (опр.), зн. $\angle XO_1M = \angle SO_1O_2$ (св. верт. $\angle$)

N5 (продолжение) B-5

Зн. $\triangle XO_1M \sim \triangle SO_1O_2$ (призн. под. (0) = по 2-м (∠)),

Зн. $\frac{XO_1}{SO_1} = \frac{O_1M}{O_1O_2} = \frac{XM}{SO_2}$ (опр. под.)

$O_1O_2 \cap \omega = (\cdot)P$

$O_1O_2 = R_1 + PO_2$ (акс. изм. отр.)

$\frac{XO_1}{SO_1} = \frac{O_1M}{R_1+PO_2}$

$SO_1 \cdot O_1M = XO_1 \cdot R_1 + PO_2 \cdot XO_1$

$\triangle SPO_1$ – равнобедр., т.к. $PO_1 = SO_1 = R_1$ (опр.), ~~Зн.~~ $\angle O_1SP =$

$= \angle SPO_1 = \frac{180^\circ - \angle SO_1P}{2}$

$\angle O_2SP = 90^\circ - 90^\circ + \frac{\angle SO_1P}{2}$

$\angle O_2SP = \frac{\angle SO_1P}{2}$

$\frac{BA}{BC} = \frac{LA}{LC}$

Проведем DC, $\triangle ADC$ – впис. в окр. ω (опр.),

DM – мед. $\triangle ADC$

Поставим $(\cdot)S_1 \in MO_1$, $S_1 \in \omega$, $\angle SO_1P = \smile PS$

(центральный (∠))

пр $BL \cap \omega = (\cdot)L'$?

~~$\smile DC = \smile AD$~~

$\smile AL' = \smile L'C$

№2

Пусть l_1, l_2, l_3, l_4 - длины сторон данного четырехугольника

По условию

$$l_1+l_2+l_3 \vdots l_4$$
$$l_2+l_3+l_4 \vdots l_1$$
$$l_1+l_3+l_4 \vdots l_2$$
$$l_1+l_2+l_4 \vdots l_3$$

Значит:

$$l_2+l_3+l_4 = k_1 l_1$$
$$l_1+l_3+l_4 = k_2 l_2$$
$$l_1+l_2+l_4 = k_3 l_3$$
$$l_1+l_2+l_3 = k_4 l_4 \quad , \quad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{N}$$
$$l_1+l_2+l_3+l_4 = 10^{100} \text{ (усл.)}$$

Сложим выражения с k

$$l_2+l_3+l_4+l_1+l_3+l_4+l_1+l_2+l_4+l_1+l_2+l_3 = k_1 l_1+k_2 l_2+k_3 l_3+k_4 l_4$$
$$3l_1+3l_2+3l_3+3l_4 = k_1 l_1+k_2 l_2+k_3 l_3+k_4 l_4$$
$$(3-k_1) l_1+(3-k_2) l_2+(3-k_3) l_3+(3-k_4) l_4 = 0$$
$$l_1, l_2, l_3, l_4 > 0$$

По неравенству четырехугольника (его несложно доказать, т.к. если $l_1 = l_2+l_3+l_4$, то это отрезок l_1 с отрезками l_2, l_3, l_4 на нём, B-5

№2 (продолжение)
если $l_1 > l_2 + l_3 + l_4$
нельзя отложить даже отрезок из l_2, l_3, l_4 равный по длине l_1)

$l_1 < l_2 + l_3 + l_4$

$l_2 < l_1 + l_3 + l_4$

$l_3 < l_1 + l_2 + l_4$

$l_4 < l_1 + l_2 + l_3$

$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 < 3(l_1 + l_2 + l_3 + l_4)$

Хотя бы одно из $(3-k_i) \leq 0$
и хотя бы одно $(3-k_i) \geq 0$,
т.к. иначе $\sum_{i=1}^{4} (3-k_i) \cdot l_1 > 0$ или < 0

$k_1 l_1 - l_2 + l_1 = k_2 l_2$

$l_1(k_1+1) = l_2(k_2+1)$

Аналогично

$l_3(k_3+1) = l_4(k_4+1)$

$l_2(k_2+1) = l_3(k_3+1)$

$l_1(k_1+1) = l_2(k_2+1) = l_3(k_3+1) = l_4(k_4+1)$

$l_1 k_1 + l_1 = l_2 k_2 + l_2 = k_3 l_3 + l_3 = k_4 l_4 + l_4$

$l_1(k_1+1) = l_2(k_2+1)$ $\qquad$ $l_1(k_1+1) = l_3(k_3+1)$

$l_3(k_3+1) = l_4(k_4+1)$ $\qquad$ $l_2(k_1+1) = l_4(k_4+1)$

$l_2(k_2+1) = l_3(k_3+1)$

$l_4(k_4+1) = l_1(k_1+1)$

$\begin{cases} l_1 = l_2 & l_2 = l_3 \\ l_3 = l_4 & l_4 = l_1 \end{cases}$ — тогда четырёхугольник очевидно ромб

$\begin{cases} l_1 = k_2+1 \\ l_2 = k_1+1 \\ l_3 = k_4+1 \\ l_4 = k_3+1 \\ l_2 = k_3+1 \\ l_3 = k_2+1 \\ l_4 = k_1+1 \\ l_1 = k_4+1 \\ l_1 = k_3+1 \\ l_3 = k_1+1 \\ l_2 = k_4+1 \\ l_4 = k_1+1 \end{cases}$ отсюда $\qquad$ $l_1 = l_3 = l_4 = l_2$

В каждом из $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ уравнений

$l_i(k_i+1) = l_j(k_j+1)$ $\qquad$ $i \neq j$, $\quad i, j \in \mathbb{N}$, $\quad i, j \leq 4$

$l_i(k_i+1) \geq 2$, значит есть два решения:

$\left[\begin{array}{l} ① \begin{cases} l_i = k_j+1 \\ l_j = k_i+1 \end{cases} \\ ② \begin{cases} l_i = l_j \\ k_i+1 = k_j+1 \end{cases} \end{array}\right.$

В-5

№2 (продолжение)

По принципу Дирихле обязательно найдётся либо 3 ① решения либо 3 ② решения, если нашлось 3 ② решений, то $l_1 = l_2 = l_3 = l_4$ и 4-хуг-к – трапеция, иначе найдётся 4 ① решения (из которых либо $l_1 = l_2 = l_3 = l_4$, либо $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$), это значит, что 4-хуг-к – трапеция.

№4

$P_1(x) = x^2 + a_1$

$P_2(x) = x^4 + a_1 x^2 + a_2$

$P_{n+1}(x) = P_n(x) \cdot x^2 + a_{n+1}$

$P_{n+1}(x) = 0$

$P_n(x) \cdot x^2 = -a_n$, т.к. $a_n \neq 0$, то $x \neq 0$ $x^2 > 0$

$P_n(x) = -a_n$

a_n — наименьший корень $P_{n-1}(x)$ если бы было $c\, n \geq 1$ (в условии)

$P_1(x) = x^2 + a_1$

$a_2 = -\sqrt{-a_1}$

$P_2(x) = x^4 + a_1 x^2 - \sqrt{a_1}$

$-\sqrt{-a_1} \leq 0$

$a_1 \neq 0$, зн. $-\sqrt{-a_1} = a_2 < 0$

$a_1 \cancel{<} 0$

$-a_n > 0$

$\frac{-a_n}{x^2} > 0$ $\quad -a_n < \frac{-a_n}{x_2}$

Значит есть такая последовательность $a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$, где каждый член меньше предыдущего ч.т.д.

№3 Нетрудно привести пример, где 2018 чисел в 1-й строке: например, все числа равные $+\sqrt{p}$ и $-\sqrt{p}$, где p — простое (все p — целые числа) 1019 простых

В-5

№3 (продолжение)

и 3 рациональных числа (например, -1, 0, 1), всем иррациональным числам нужно сопоставить им противоположные, а рациональные расположить, например, так:

-1	0	1
1	-1	0

Докажем, что не может быть более 2016 иррациональных чисел

Разобьём все числа (каждое) на рациональную часть r (представимую без иррационального множителя) и иррациональную часть q (у числа $\sqrt{2} = 0 + \sqrt{2}$ $r = 0$, $q = +\sqrt{2}$)

Два иррациональных числа

в сумме могут давать рациональное число, только если $q_1 = -q_2$, иначе получится число с иррациональной частью $q_1 \cancel{+} q_2$

Покажем, что у трех иррациональных чисел не может быть так, чтобы все попарные суммы были рациональны,

иначе

если у первого числа иррациональная часть q, то у 2-ого — $-q$, у 3-его q, у 1-ого — $-q$ — противоположные, значит 3 таких числа не могут давать попарно в сумме

В – Б

Б з (продолжение)

рациональные, аналогично для любого нечётного количества

Рациональные числа могут давать попарные суммы рациональных (на- пример выше)

иррациональных - чётное кол-во, если 2018, то рациональное одно, у него нет пары, значит 2016

Ответ: 2016